On définit la suite: $U_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$, n ∈ ℕ

4) Montrer que : $\frac{1}{(n+1)\sqrt{2}} \leq U_n \leq \frac{1}{n+1}$. En déduire la limite de la suite (U_n)

on $0 \leqslant u \leqslant 1$

$\Rightarrow 0 \leqslant u^2 \leqslant 1$

$\Rightarrow 1 \leqslant 1+u^2 \leqslant 2$

$\Rightarrow 1 \leqslant \sqrt{1+u^2} \leqslant \sqrt{2}$

$\Rightarrow \sqrt{1+u^2} \geqslant 1$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} \leqslant 1$

on $u^n \geqslant 0$

$\frac{u^n}{\sqrt{2}} \leqslant \frac{u^n}{\sqrt{1+u^2}} \leqslant u^n$

$u \longmapsto \frac{u^n}{\sqrt{1+u^2}}$ et $u \longmapsto u^n$ sont

des fonctions continues sur $[0,1]$

$\frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^1 u^n\,dx \leqslant \int_0^1 \frac{u^n}{\sqrt{1+u^2}}\,dx \leqslant \int_0^1 u^n\,dx$